人民币指数美式期货期权定价研究①

韩立岩，崔旻抒
(北京航空航天大学经济管理学院，北京 100191)

摘要：作为发展人民币外汇衍生产品的理论准备，建立人民币指数美式期货期权的定价模型，提出了基于二次逼近的求解方法；进而应用该模型考察了人民币指数美式期货期权理论价值的变化，发现当期权处于实值状态时，提前执行的溢价对于期权定价有显著影响. 实验结果表明，该定价模型能够刻画人民币指数美式期货期权提前执行的特征，并且能够反映人民币指数期货期权的定价参数对于期权价格的影响，可以为交易策略和企业相关公允价值的计算提供技术支持.

关键词：人民币指数；美式期货期权；二次逼近法；估值模型
中图分类号：F830.9　　文献标识码：A　　文章编号：1007－9807(2010)03－0050－14

0 引 言

中国人民银行于 2005年 7月 21日启动人民币汇率体制改革，将人民币从固定汇率制度中退出，允许每日 0.3%的浮动空间，到 2007年 5月 21日又扩大到 0.5%. 随着我国人民币汇率形成机制不断完善，人民币汇率的波动幅度逐渐增加，汇率风险也随之增大，这给中国企业和金融体系增加了新的“风险源”，因此，市场对人民币衍生产品的需求日趋强烈. 目前银行间外汇市场的外汇远期和外汇掉期业务已经不能满足外汇资产流动的需要，而境外的人民币交易，如境外离岸市场人民币衍生产品的交易，却变得日益活跃而且品种也在增加. 尤其是芝加哥商品交易所于 2006年 8月 28日推出了 3种人民币期货及期货期权产品，这一方面说明随着中国经济的繁荣发展，投资者们对人民币的兴趣越来越浓厚，市场中存在对于人民币衍生产品合约的需求；另一方面也说明我国接受着来自国外市场争夺人民币衍生品定价权的挑战. 这种状况呼吁加强对人民币外汇交易和衍生产品创新的研究.

外汇衍生品的基本功能是规避风险和价格发现. 正如其他市场一样，在基础市场发展到一定阶段时，会产生相应的指数产品，因为指数产品有其他产品难以发挥的作用和功能. 美元指数期货于 1985年开始在纽约期货交易所 (NYBOT)交易，给那些需要进行汇率风险规避的跨国公司、机构投资者等提供了方便的工具和渠道，使投资者可以低成本高效率地管理汇率风险.

同样，中国外汇市场的参与者也需要以人民币指数为标的的新型外汇指数期货、期权产品作为套期保值工具. 主要应用领域有：进出口企业、经营外汇业务的银行以及我国快速增长的外汇储备等.

提出理论定价模型是发展新型人民币衍生品的必要准备. 本文在课题组②编制的人民币指数基础上[1]，建立人民币指数期货期权的理论 (公允)定价模型. 一方面，可以为今后产品推出提供交易价格基础和评估准则；另一方面，为企业计算

① 收稿日期：2008－05－19；修订日期：2009－02－25.
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (70831001；70741009；70521001).
作者简介：韩立岩 (1955－)，男，北京人，教授，博士生导师. Email：hanly@buaa.edu.cn
② 《国际化前景下人民币衍生品框架设计、实施策略及创新研究》课题组 (国家自然科学基金，项目编号：70741009).
?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

相关衍生产品的公允价值提供技术参考, 这是落实 2006 年财政部制定的《企业会计准则》的需要.

国外在外汇衍生品方面的创新是值得借鉴的, 例如 1985年推出的美元指数期货和 1986年推出的期货期权等. 美元指数衍生产品对于企业套期保值起到了积极的作用. Krul和 Rai[2] 证实美元指数期货对一揽子货币的组合能起到对冲作用. Schap[3] 也展示了用指数产品进行对冲的优越性. 美元指数期货、期权对于一揽子货币的套期保值和对冲风险是种难以替代的工具, 但是, 这种工具作用的基础是市场对于美元指数期货、期权定价的准确性. 而本文要研究的人民币指数, 目前还不是可交易的产品, 国内外还都没有专门做过关于其衍生产品定价的研究, 因此, 需要借鉴国外关于美元指数期货期权的定价研究.

对期货期权的估值源于 Black[4] 在 1976年提出的欧式期货期权的分析框架, 在这之后, Ramaswamy和 Sundaresan[5], Whaley[6], Kuldeep和 Kishore[7] 等分别研究了美式期货期权的估值问题. 之后, Alan等[8] 讨论了在服从对数分布的跳跃过程情况下的期货期权问题. 随着衍生品市场的发展, 越来越多的文献开始关注以指数为基础的对冲工具, 但是直到 2003 年, Bhargava和 Clark[9] 才专门研究了美元指数期货期权的定价问题. 之所以要特别研究, 是因为美元指数与其它指数有所不同, 它采用的是几何加权平均, 而本文要研究的人民币指数也采用了同样的编制方法. 但是上述文献所讨论的美元指数期货期权定价也只是局限于 1976 年 Black提出的欧式期货期权定价的框架内, 而对于市场上广泛存在的美式期权则没有论及.

相比之下, 国内对于货币期货期权的研究还不多见, 谢赤[10] 讨论了随机利率条件下货币期货期权的估值, 其他则主要是关于商品期货期权的文献.

本文希望能在前人研究的基础上, 着重讨论人民币指数美式期货期权的定价. 但是美式期权不像欧式期权, 无法得到他们满足的偏微分方程的解析解. 因此, 通常的做法是通过数值计算来近似逼近美式期权价值. Ramaswamy和 Sundaresan[5] 使用了有限差分逼近法, 这种方法对求解美式期权和更复杂的奇异期权比较有效, 但是在计算过程中需要生成期权有效期限内期权价格演进过程中可能经过的每种路径, 花费很高的时间成本. Kuldeep和 Kishore[7] 运用了复合期权分析逼近法来定价美式期货期权, 这种方法比有限差分等数值计算方法节省时间, 但是它却要求估计累积二变量和三变量的正态密度函数. Whaley[6] 采用了二次逼近法估计美式期货期权. 二次逼近方法是由 MacMillan[11] 最先提出, 并将其应用于普通股的美式看跌期权的估值问题上, 之后经 Barone-Adesi和 Whaley[12] 改进, 得到一般性框架, 并用于股票期货期权. 这种方法易于在电子计算机上实现, 既不用估计多变量密度函数分布, 在时间上也优于有限差分等方法, 具有准确、快捷的特点; 并且这种算法可以得到美式期权提前执行的最优边界值. 但是不易通过改变它的参数来提高它定价的精度, 且二次逼近方法在长期期权的定价方面精确度也会降低, 对于高维期权定价也不适用.

除了上述这些专门考虑美式期货期权估值问题的文献, 还有很多对于一般美式期权定价的文献, 也主要针对的是美式期权偏微分方程的数值解法, 比如 Cox等[13] 首次提出二叉树定价模型解决美式期权定价问题, 其后 Jarrow和 Rudd[14] 等又进一步扩展了二叉树方法. Alfredo Ibanez和 Fernando Zapatero[15] 提出了基于最优执行边界计算的蒙特卡罗方法来模拟美式期权价格. 文中指出, 当衍生证券的维数比较高时, 蒙特卡罗模拟成为惟一有效的数值分析方法. 马俊海等[16] 提出更为有效的关于期权定价蒙特卡罗模拟的综合性方差减少技术. 但是, 蒙特卡罗模拟具有收敛不确定这个缺陷, 并且要想达到较高的模拟精度, 需要很高的模拟次数, 否则就可能产生较大的方差. 姜礼尚等[17] 研究了跳跃扩散模型下美式看跌期权的定价, 并通过自由边界条件给出最佳实施边界的显式表达式, 为相关研究展示了新的思路.

考虑到本文需要定价的人民币指数期货期权合约主要是短期的, 并且标的资产只是期货合约, 不涉及高维资产的定价; 再结合二次逼近方法收敛速度快等优点, 本文采用二次逼近法来估计人民币指数美式期货期权的价值.

本文设计不同到期期限, 不同执行价格的人民币指数期货期权合约, 并基于 Whaley[6] 美式期

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

权的二次逼近估值方法建立人民币指数美式期货期权的估值模型. 第 1节简单介绍作为原生标的资产的人民币指数及指数期货; 第 2节建立人民币指数期货期权的理论定价模型, 并着重分析美式期货期权的价值变化; 第 3节进行模拟实验, 计算人民币指数期货期权的价格. 最后一节是本文的结论.

1 人民币指数及人民币指数期货

本节简要介绍作为原生标的资产的人民币指数及人民币指数期货. 本文用到的人民币指数数据[1], 来自国家自然科学基金应急项目组③, 他参考美元指数的编制思路, 将人民币指数进行类似的处理, 确定成分货币的组成及权重.

首先, 参考一篮子货币构成, 并考虑 2005年和 2006年中国前 10位的贸易伙伴. 项目组确定了 7个样本货币 (美元、欧元、日元、韩圆、新台币、港币、英镑). 其次, 根据不同的货币在市场中的影响以及双边贸易额, 确定人民币指数各样本货币的权重, 其中贸易往来依据 2005年、2006年两年 FDI(双边贸易额)以美元计价的平均值, 并考虑 2006年的 FDI权重加以修正.

由此, 得到人民币指数给予各成份货币的权重分布如表 1.

表 1 人民币指数各成份货币的权重分布

Table 1 The weighting distribution of component currency in Chinese Yuan Index

货币名称	货币代码	权重
美元	USD	0.2260
日元	JPY	0.1910
欧元	EUR	0.1857
港币	HKD	0.1604
韩圆	KRW	0.1144
新台币	TWD	0.0957
英镑	GBP	0.0268

人民币指数的基期选择在 2005年 7月 21日 (以汇改为分界线), 确定基数为 $I_0=100$. 2005年 7月 21日人民币汇率形成机制改革实施后, 中国建立了以市场供求为基础, 参考一篮子货币进行调节, 有管理的浮动汇率制度. 人民币汇率制度变得更灵活, 更有弹性.

在确定了上述成分货币及其权重后, 依据美元指数的计算方法, 确定人民币指数的计算公式, 应该表示 7种主要成分货币对人民币汇率相对于基准时期 (2005年 7月 21日)变化的几何平均加权值. 人民币指数用 CNYX表示, 计算公式如下 (具体论证参见文献 [1])

$$(CNYX)_t = A\times(EUR)_t^{-w_1}\times(USD)_t^{-w_2}\times(JPY)_t^{-w_3}\times(KRW)_t^{w_4}\times(GBP)_t^{-w_5}\times(TWB)_t^{w_6}\times(HKD)_t^{-w_7} \quad (1)$$

其中, A为代入基期汇率时使基期指数为 100的常数; w_i表示各成分货币的权重, 即期汇率以直接标价法表示时权重符号为负, 以间接标价法表示时符号为正.

上述人民币指数中各美元、欧元、日元、港币、英镑的即期汇率日数据来源于中国国家外汇管理局网站上公布的人民币兑美元、欧元、日元、港币、英镑的汇率. 其他货币汇率通过欧洲中央银行上的历史数据用套算汇率计算得出. 各贸易伙伴的贸易额数据来自国家外汇管理局. 人民币指数期货的价格数据也来自于项目组的仿真结果.

2 人民币指数期货期权的理论定价模型

本节建立人民币指数期货期权的理论定价模型, 着重研究美式定价, 并考察期货期权的理论价值变化. 首先参考 Black[4] 的欧式期货期权模型建立人民币指数欧式期货期权的估值模型. 虽然 Black定价模型只适用于欧式期货期权, 但它却给期货期权的估值问题提供了理论基础. 其描述期货期权价格动态变化的随机微分方程对于美式、欧式、看涨、看跌期货期权都适用, 并且在本文使用的对美式期货期权的定价方法中, Black欧式期货期权的价格也是该方法的基础.

2.1 假设

1) 市场是无摩擦的, 没有交易费用. 这些包

③《国际化前景下人民币衍生品框架设计、实施策略及创新研究》课题组, 人民币指数的编制工作由韩立岩、刘兰芬完成. 本文用到的人民币指数数据是 A方案设计下的人民币指数.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

括直接的费用如佣金费以及隐含的费用如买卖价差和对卖空的罚息.

2)市场不存在无成本的套利机会.

3)无风险收益率是常数.

4)Buraschi 和 Jiltsov[18] 与 Basak 和 Croitoru[19] 指出,期货价格服从布朗运动,因此指数期货价格的动态变化可由下面的随机微分方程表示

$$dF/F = \mu\, dt + \sigma\, dZ$$

其中, F是期货的即期价格, μ是期货价格的预期增长率, σ是期货价格变动的预期波动率, Z是标准维纳过程.

另外令 $F(t_0)$为期货期权到期时期货的价格, $c(F(t), T)$为 t时刻人民币指数欧式看涨期货期权价格, $p(F(t), T)$为 t时刻人民币指数欧式看跌期货期权价格, r为无风险收益率, X为期货期权的执行价格, T为期货期权的有效期限.

2.2　人民币指数欧式期货期权定价模型的建立

在上述的假设下,可以构造出期货期权及其标的期货合约的无风险投资组合,在无套利机会条件下,该投资组合的收益必定为无风险收益率 r.这样就可以得到期货期权价格必须满足的随机微分方程,它与 Black-Scholes期权定价模型中的随机微分方程类似,统称为 B-S随机微分方程

$$\sigma^2 F^2 c_{FF}/2 - rc + c_t = 0 \qquad (2)^{④}$$

依据人民币指数期货期权与标的人民币指数期货之间的边界条件

$$c(F(t), T) = \max[0, F(t_0) - X]$$

可以求出期货期权的理论价格.得到经典 Black模型

$$c(F(t), T) = e^{-rT}[FN(d_1) - XN(d_2)]$$

其中

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\frac{F}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) * T\right) \qquad (3)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

式(2)描述的随机微分方程对看跌期货期权同样适用,欧式看跌期货期权的边界条件是

$$p(F(t), T) = \max[0, X - F(t_0)]$$

并结合期权价格满足的微分方程,得到人民币指数欧式看跌期货期权的定价模型

$$p(F(t), T) = e^{-rT}[XN(-d_2) - FN(-d_1)] \qquad (4)$$

2.3　人民币指数美式期货期权定价模型的建立

2.3.1　美式期货期权提前执行的特征

美式期货期权是指在期权合约有效期内的任意时刻都可以按事先约定的执行价格购买或出售相应的期货合约.由 2.2节得出的人民币指数欧式看涨期货期权定价模型提供了一种便利的方式来证实美式看涨期货期权可以提前执行.随着期货价格相对期权的执行价格逐渐趋近于极大值, $N(d_1)$与 $N(d_2)$的值逐渐趋近于 1,那么欧式看涨期货期权的价值就趋近于 $(F - X)e^{-rT}$.但对于美式看涨期货期权来说,如果此时执行期权,则可以立即实现价值 $(F - X)$,而这个值很显然要大于欧式期货期权的价值 $(F - X)e^{-rT}$.因此,提前执行对于美式看涨期货期权可能更有利,从而,这种提前执行的权利也使得美式期货期权相比欧式期货期权来说价值更高.

图 1直观地阐述了美式看涨期货期权提前执行权利的价值.在图 1中, F^* 表示期货价格水平的临界值,在这个点上,美式看涨期权的持有者对立即执行期权还是继续持有它无差异.当期货价格低于这一临界值 F^* 时,美式看涨期货期权提前执行的溢价,记为 $\varepsilon_C(F(t), T)$,应该等于美式与欧式期货期权之间的差额.当期货价格高于这一临界值 F^* 时, $\varepsilon_C(F(t), T)$应该等于 $F - X - c(F(t), T)$.注意到,当期货价格相对于期权的执行价格逐渐趋近于极大值时,欧式看涨期货期权的价格趋近于 $(F - X)e^{-rT}$,从而提前执行溢价趋近于 $(F - X)(1 - e^{-rT})$.

图 1　美式与欧式期货期权的理论价值曲线

Fig. 1 The theoretical value curves of American and European call futures options

④　式(2)中, c_{FF}表示 c对 F的二阶偏导数, c_t表示 c对 t的一阶偏导数,下同.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2.3.2 人民币指数美式期货期权二次逼近法模型

Black[4] 指出，如果能够建立期货期权以及标的期货合约的无风险投资组合，那么就可以得到由公式（2）表示的期货期权价格满足的随机微分方程，并且该方程同样适用于相应的美式期权价格．惟一不同的是美式期货期权的边界条件为不等式，比如对于看涨期权，其边界条件为 $C(F(t),T)\geqslant \max(0,F(t)-X)$，因此无法得到它们所满足的随机微分方程的解析解．当期权定价公式的解析解无法求得时，通常可以求助于数值定价方法，即依据上述的随机微分方程并结合美式期货期权的边界条件，运用一些数值计算方法得到其近似解．本文采用 Whaley[9] 提出的二次逼近方法．

这一部分仍采用 2.1节的符号表示．定义人民币指数美式看涨期货期权与相应的欧式期货期权的价格差为

$$\varepsilon_C(F(t),T)=C(F(t),T)-c(F(t),T)$$

其中，$C(F(t),T)$是所要求解的美式期货期权价值，$c(F(t),T)$是相应欧式期权价值．由于欧式和美式期权价格都满足 B-S随机微分方程，因此，两者之间的溢价也应满足这个随机微分方程，这是二次逼近方法的核心思想．

溢价满足的随机微分方程如下

$$\sigma^2F^2\varepsilon_{FF}/2-r\varepsilon+\varepsilon_t=0 \tag{5}$$

为了简化，做如下替代：

首先，令 T为期权的有效期限，即 $T=t^*-t$，t^*为到期日，因此 $\varepsilon_T=-\varepsilon_t$．其次，将式（5）乘以 $2/\sigma^2$，再次，令 $M=2r/\sigma^2$，那么式（5）重写成

$$F^2\varepsilon_{FF}-M\varepsilon-(M/r)\varepsilon_T=0 \tag{6}$$

不失一般性，溢价可被定义成

$$\varepsilon_C(F,K)=K(T)f(F,K)^{⑤} \tag{7}$$

通过适当的代替和变量变换，得

$$F^2f_{FF}-(M/K)f-(1-K)Mf_K=0 \tag{8}$$

上式中的最后一项近似等于 0，因此得到

$$F^2f_{FF}-(M/K)f=0 \tag{9}$$

上式可以通过标准方法求解，加上美式期货期权执行的边界条件，可以得到人民币指数美式看涨期货期权的定价模型如下⑥

$$C(F(t),T)=c(F(t),T)+A_2(F/F^*)^{q_2},\quad 当\ F<F^*$$

$$C(F(t),T)=F-X,\quad 当\ F\geqslant F^*$$

其中

$$A_2=(F^*/q_2)\{1-e^{-rT}N[d_1(F^*)]\},$$

$$d_1(F^*)=\frac{\ln(F^*/X)+0.5\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$q_2=(1+\sqrt{1+4k})/2$$

$$k=\frac{2r}{\sigma^2(1-e^{-rT})} \tag{10}$$

F^*是美式期货期权可以提前执行的临界值，当期货价格超过这个临界值时，美式期货期权可以立即执行，并且 F^* 可以通过下面的等式迭代决定

$$F^*-X=c(F^*(t),T)+(F^*/q_2)\times\{1-e^{-rT}N[d_1(F^*)]\} \tag{11}$$

估值模型（10）的含义是直观的．对于当前低于临界值 F^* 的期货价格，美式看涨期货期权的价值等于欧式看涨期货期权的价值加上提前执行的溢价，这个溢价由 $A_2(F/F^*)^{q_2}$ 估计．若当前期货价格高于临界值 F^*，则美式期权的价值就是它执行时的收益．这也正是图 1中展现的．

相比人民币指数欧式期货期权定价模型，美式期权的定价公式中惟一需要复杂计算的参数是美式期权提前执行的临界值 F^*．本文参考 Whaley等提出的美式期权的解析算法推导出求解临界值 F^* 的迭代算法，并用 Matlab软件编程求解．

同理，由二次逼近算法可以得到人民币指数美式看跌期货期权的定价模型

$$P(F(t),T)=p(F(t),T)+A_1(F/F^{**})^{q_1},\quad 当\ F>F^{**}$$

$$P(F(t),T)=X-F,\quad 当\ F\leqslant F^{**}$$

⑤ Whaley在其论文（文献[12]）的推导过程中做了这样的替换．通过式（6）可以得出期权溢价与标的期货及期权有效期限相关，因此重新定义一个溢价，表示期权溢价是标的期货以及有效期限的函数，目的是方便后面公式的推导．

⑥ 为了保证文章的连贯性，详细的基于二次逼近的货币指数美式期货期权定价的计算过程参见附录．

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中

$$A_1 = -(F^{**}/q_1)\{1 - e^{-rT}N[-d_1(F^{**})]\},$$

$$d_1(F^{**}) = \frac{\ln(F^{**}/X) + 0.5\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$q_1 = (1 - \sqrt{1 + 4k})/2$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2(1 - e^{-rT})} \tag{12}$$

F^{**} 是看跌期权提前执行的临界值, 当期货价格小于这个临界值时, 提前执行是有利的. 同样通过下面的等式可以迭代算出临界值 F^{**}

$$X - F^{**} = P(F^{*}(t), T) - (F^{**}/q_1) \times \{1 - e^{-rT}N[-d_1(F^{**})]\} \tag{13}$$

2.3.3　人民币指数美式期货期权提前执行溢价及理论价值变化

本文选定了几组期权定价参数, 并根据 2.2.2.3节建立的人民币指数期货期权定价模型计算人民币指数美式期货期权提前执行的溢价以及欧式美式期货期权的理论价值. 结果列于表 2.

表 2　欧式与美式期货期权的理论价值

Table 2　Theoretical European and American futures option values

期货期权价格参数	期货价格	看涨期货期权			看跌期货期权		
		欧式价格	美式价格	提前执行溢价	欧式价格	美式价格	提前执行溢价
r = 0.08, σ = 0.15, T = 0.25	85	0.005 0	0.005 2	0.000 2	19.609 0	20.000 0	0.391 0
	95	0.310 4	0.312 4	0.002 0	10.112 4	10.203 9	0.091 5
	105	3.078 7	3.093 1	0.014 4	3.078 7	3.093 2	0.014 5
	115	10.243 1	10.327 5	0.084 4	0.441 1	0.443 8	0.002 7
	125	19.632 6	20.000 0	0.367 4	0.028 7	0.029 2	0.000 5
r = 0.12, σ = 0.15, T = 0.25	85	0.004 9	0.0053	0.000 4	19.413 8	20.000 0	0.586 2
	95	0.307 3	0.310 7	0.003 4	10.011 7	10.165 0	0.153 3
	105	3.048 1	3.072 1	0.024 0	3.048 1	3.072 2	0.024 1
	115	10.141 2	10.282 5	0.141 3	0.436 7	0.441 2	0.004 5
	125	19.437 3	20.000 0	0.562 7	0.028 4	0.029 3	0.000 9
r = 0.08, σ = 0.30, T = 0.25	85	0.498 6	0.502 1	0.003 5	20.102 6	20.295 3	0.192 7
	95	2.213 6	2.224 2	0.010 6	12.015 6	12.086 5	0.070 9
	105	6.153 2	6.181 9	0.028 7	6.153 2	6.182 0	0.028 8
	115	12.494 5	12.565 9	0.071 4	2.692 5	2.705 2	0.012 7
	125	20.622 4	20.786 6	0.164 2	1.018 4	1.024 4	0.006 0
r = 0.08, σ = 0.15, T = 0.5	85	0.083 4	0.085 9	0.002 5	19.299 2	20.000 0	0.700 8
	95	0.942 2	0.954 2	0.012 0	10.550 1	10.728 4	0.178 3
	105	4.266 8	4.315 3	0.048 5	4.266 8	4.315 4	0.048 6
	115	10.821 4	10.994 6	0.173 2	1.213 5	1.228 5	0.015 0
	125	19.460 1	20.015 5	0.555 4	0.244 3	0.249 3	0.005 0

注: 1. 期权执行价格等于 105.

2. 美式价格由公式 (10)、(12) 计算得到, 欧式价格由公式 (3)、(4) 计算得到.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由表 2注意到,美式虚值期货期权的提前执行溢价是可以忽略不计的.比如,当期货价格 F为 95,无风险收益率 r为 0.08,期货价格的波动率 σ为 0.15时,一个执行价格 X为 105,有效期限 T为 0.25的虚值看涨期权的提前执行溢价只有 0.002 0,还不到期权价格的 1%,即使是平值期权,提前执行的溢价也只占期权价格的很小比例.只有当期权处于实值状态时,提前执行溢价才对期权定价有显著影响⑧.对于看跌期货期权有相同的结论.

这说明,当期权合约处于虚值或平值状态时,可以近似地用 Black欧式解析定价公式来代替美式期权价格.但是当期权合约处于实值状态,尤其是深度实值时,欧式定价就会出现偏差,美式提前执行的特征对期权的定价就会产生影响.因此,必须用美式期货期权的定价模型加以修正.

表 2也反映了期权定价参数取值的不同对期货期权价值的影响,比如第 1组与第 3组数据,其他参数保持不变,当期货价格的波动率 σ增加时,欧式与美式看涨看跌期货期权的价格都增加.

期权定价参数对期权的价格有重要作用,每个参数对期权价格的影响程度不同.图 2—图 11进一步直观地展示了欧式与美式期货期权价值如何随期权定价参数变化以及欧式与美式期货期权价格的差别.图 2、3分别为看涨与看跌期货期权的回报图,表示随着期货价格的上升,看涨期货期权的价值增大,而看跌期货期权的价值减小.这是因为如果看涨期货期权在将来某一时间执行,则其收益为期货价格与执行价格的差额.对于看跌期货期权来说,其收益为执行价格与期货价格的差额.因此,看跌期货期权的行为刚好与看涨期权相反.

图 4、5表示随着执行价格的上升,看涨期货期权的价值减小,而看跌期货期权的价值增大.这是因为执行价格越高,看涨期权执行的可能性越低,因此执行价格越高的看涨期权其价格越低.相反,执行价格越高的看跌期权执行的可能性越高,相应地,执行价格越高的看跌期权其价格越高.

图 2 美式与欧式看涨人民币指数期货期权与标的期货价格的关系曲线

Fig. 2 American and European call Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the underlying futures prices

图 3 美式与欧式看跌人民币指数期货期权与标的期货价格的关系曲线

Fig. 3 American and European put Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the underlying futures prices

图 6、7表示当期货期权的有效期限增加时,看涨和看跌期货期权的价值都增加.考虑其它条件都相同但只有到期日不同的两个期货期权,则对于有效期限长的期权,执行的机会不仅包含了有效期短的那个期权的所有执行机会,而且它的获利机会更多.因此,有效期长的期权的价值总是大于或等于有效期短的期权价值.

⑦ 表 2中的 r与前面理论模型中 r的含义是一致的,表示无风险收益率.表 2的目的是为了比较人民币指数欧式与美式期货期权价格的理论价值,因此在可能的数值范围内选定了几组定价参数.而在实际中,通常用短期国库券利率作为无风险收益率.例如,美国一般以 3个月或 1年的国库券利率作为无风险收益率.考虑到中国国情,本文在后面人民币指数期货期权价格的数值计算中将人民币一年期存款利率作为无风险收益率.

⑧ 比如表 2中,当期货价格 F为 125,无风险收益率 r为 0.08,期货价格的波动率 σ为 0.15时,一个执行价格 X为 105,有效期限 T为 0.25的实值看涨期权的提前执行溢价为 0.367 4,对美式期权定价有显著影响.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图 8、9反映看涨看跌期货期权与期货波动率的关系.期货价格的波动率用来衡量未来期货价格变动的不确定性.看涨期货期权的持有者从期货价格上升中获利,但是当期货价格下跌时,由于他的最大损失就是期权费,所以他仅有有限的损失.与此类似,看跌期货期权的持有者从期货价格下跌中获利,但当期货价格上升时,仅有有限的损失.因此,随着波动率的增加,看涨期货期权和看跌期货期权的价值都会增加.事实上,正是由于期货价格的波动,才有期货期权的广泛应用.

图4　美式与欧式看涨人民币指数期货期权与执行价格的关系曲线

Fig. 4 American and European call Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the exercise prices

图5　美式与欧式看跌人民币指数期货期权与执行价格的关系曲线

Fig. 5 American and European put Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the exercise prices

图6　美式与欧式看涨人民币指数期货期权与期权有效期限的关系曲线

Fig. 6 American and European call Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the option maturity

图7　美式与欧式看跌人民币指数期货期权与期权有效期限的关系曲线

Fig. 7 American and European put Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the option maturity

图8　美式与欧式看涨人民币指数期货期权与期货价格波动率的关系曲线

Fig. 8 American and European call Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the futures volatility

图9　美式与欧式看跌人民币指数期货期权与期货价格波动率的关系曲线

Fig. 9 American and European put Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the futures volatility

图10　美式与欧式看涨人民币指数期货期权与无风险收益率的关系曲线

Fig. 10 American and European call Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the risk free interest rate

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

图 11　美式与欧式看跌人民币指数期货期权与无风险收益率的关系曲线

Fig. 11 American and European put Chinese Yuan Index futures option prices as the function of the risk free interest rate

注: 图 2— 11中符号 F、X、T、V、R分别表示标的期货价格、执行价格、期权有效期限、波动率以及无风险收益率.

图 10、11反映当无风险收益率增加时, 期权持有者收到的未来现金流的现值将减少, 因此随着无风险收益率的增加, 看涨看跌期货期权的价值都随之减少.

再一次观察图 2— 图 11, 可以发现美式期货期权的价值总是高于相应的欧式期货期权的价值, 但是期货价格波动率和无风险收益率对这种差异的影响非常小. 期货期权越是处在实值状态, 尤其是深度实值, 期货期权的有效期限越长, 美式期权这种提前执行的权利体现得就越明显, 美式相对于欧式期货期权的溢价就越大. 因此, 如果标的期货的价格相对于执行价格非常大或者期货期权的有效期限较长, 就不能用欧式的期货期权定价模型来代替美式期货期权的实际价格, 否则会出现较大的偏差.

想要充分利用美式期货期权提前执行的权利获得收益, 关键是确定美式期货期权提前执行的边界值, 本文运用二次逼近法建立的人民币指数美式期货期权定价模型可以求解出期货期权提前执行的临界值. 当给定了无风险收益率、期权执行价格、期货价格波动率以及期权有效期限时, 美式期货期权提前执行的临界值就可以确定. 当期货价格超过了这个临界值时, 执行期权就可获利.

图 6、7反映了期权的有效期限对美式期货期权溢价的影响, 那么有效期限也可能对临界值产生影响. 图 12描绘了 3种无风险收益率水平下美式看涨期货期权提前执行边界值与期权有效期限的关系曲线.

看涨期货期权提前执行的边界值是期权有效期限的增函数. 并且, 无风险收益率水平对这个边界值也有不同的影响. 在更高的无风险收益率水平下, 提前执行的边界值更低.

图 13反映了看跌期货期权提前执行边界的情形, 情况正好相反, 看跌期货期权提前执行的边界值是期权有效期限的减函数, 是无风险收益率水平的增函数.

因此, 在给定了一些参数后, 持有期货期权合约的投资者可以确定提前执行的边界值, 并且能够预测这一边界值的变化趋势, 从而能很好地利用美式期权提前执行这一权利, 获得收益.

图 12　3 种无风险收益率水平下美式看涨期货期权提前执行边界值与期权有效期限关系曲线

Fig. 12 The relationship curves between critical regions for American call futures options and option maturity at three interest rate levels

图 13　3 种无风险收益率水平下美式看跌期货期权提前执行边界值与期权有效期限关系曲线

Fig. 13 The relationship curves between critical regions for American put futures options and option maturity at three interest rate levels

3　人民币指数期货期权价格的模拟计算

本节参考芝加哥商品交易所的美元指数期货

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

期权合约, 设计场内交易的标准化人民币指数期货期权合约, 并且运用 2中建立的人民币指数期货期权的定价模型进行模拟实验. 结果表明定价模型能够刻画人民币指数美式期货期权提前执行的特征, 并且能够反映人民币指数期货期权的定价参数对于期权价格的影响.

本文将期货期权合约的到期日设定为相应标的期货合约的到期日, 并参考芝加哥商品交易所的美元指数期货期权合约, 将人民币指数期货合约的交割月份定为每年的 3月、6月、9月和 12月, 分别设计以近月期期货合约为标的的 3个月期期货期权合约以及以远月期期货合约为标的的 6个月期期货期权合约. 人民币指数期货期权合约的面值为相应人民币指数期货合约的面值.

在确定期货期权合约的执行价格时, 考虑到期货价格相差较小, 因此将标的期货的价格放大为原来的 100倍. 合约面值为 10 000 * 人民币指数, 由于标的扩大了 100倍, 那么期权的倍数为 100倍. 相应的执行价格就可以确定为 10 200, 10 250, 10 300, 10 350, 10 400等数值了.

鉴于美式期货期权在执行上的灵活性, 本文设计的期货期权合约分为欧式和美式两种.

本节模拟计算从 2006年 3月 24日起开始每个交易日的基于近月期期货合约的 3个月期人民币指数期货期权价格以及从 2006年 6月 23日开始的基于远月期期货合约的 6个月期人民币指数期货期权价格. 期货期权的定价参数中, 惟一需要测算的是期货价格的波动率 σ. 用期货收益率的历史年波动率来估计 σ.

最终, 由人民币指数欧式与美式期货期权估值模型得到人民币指数期货期权价格的模拟数值结果. 表 3列出以 2006年 6月到期的近月期期货合约为标的设计的 7份 3月期期权合约中的 1份, 执行价格为 10 150. 其模拟数值结果如表 3.

表 3　人民币指数期货期权合约的模拟数值计算

Table 3　The numerical simulation of Chinese Yuan Index futures option contracts

定价参数					期货期权模拟数值结果			
期货合约价格	有效期限 /年	无风险收益率	期货波动率	执行价格	欧式看涨	美式看涨	欧式看跌	美式看跌
10 329.44	0.239	0.022 5	0.039 1	10 150	197.43	197.68	18.957	18.976
10 329.11	0.236	0.022 5	0.039 5	10 150	197.38	197.62	19.214	19.233
10 347.45	0.233	0.022 5	0.036 3	10 150	208.69	208.97	12.268	12.281
10 336.04	0.231	0.022 5	0.035 9	10 150	198.31	198.57	13.237	13.25
10 334.77	0.219	0.022 5	0.036 0	10 150	196.34	196.59	12.477	12.49
10 316.86	0.217	0.022 5	0.035 2	10 150	180.11	180.32	14.06	14.073
10 289.28	0.214	0.022 5	0.034 3	10 150	156.07	156.24	17.463	17.478
10 279.05	0.211	0.022 5	0.033 7	10 150	146.82	146.97	18.384	18.399
10 291.73	0.208	0.022 5	0.032 4	10 150	155.13	155.3	14.062	14.075
10 326.60	0.200	0.022 5	0.032 4	10 150	184.26	184.48	8.448 5	8.456 5
10 327.91	0.197	0.022 5	0.033 1	10 150	185.83	186.05	8.702 9	8.711
10 313.35	0.194	0.022 5	0.033 1	10 150	172.93	173.12	10.29	10.299
10 317.71	0.192	0.022 5	0.031 8	10 150	175.35	175.55	8.363 3	8.370 9
10 280.39	0.178	0.022 5	0.031 1	10 150	141.58	141.71	11.71	11.718
10 233.90	0.175	0.022 5	0.032 3	10 150	106.36	106.44	22.791	22.806
10 246.13	0.172	0.022 5	0.033 9	10 150	117.2	117.29	21.446	21.46
10 245.66	0.169	0.022 5	0.033 6	10 150	116.06	116.15	20.768	20.781

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

10 186. 37	0 161	0. 022 5	0 029 5	10 150	68 129	68. 17	31. 891	31 909
10 170. 68	0 158	0. 022 5	0 031 4	10 150	61 384	61. 416	40. 777	40 8
10 166. 57	0 156	0. 022 5	0 031 5	10 150	58 93	58. 96	42. 418	42 441
10 155. 45	0 153	0. 022 5	0 031 5	10 150	52 497	52. 522	47. 065	47 091
10 133. 41	0 150	0. 022 5	0 031 5	10 150	41 368	41. 387	57. 902	57 934
10 028. 88	0 122	0. 022 5	0 031 5	10 150	7 730 9	7. 734 4	128. 52	128 61
10 036. 86	0 119	0. 022 5	0 038 6	10 150	14 958	14. 964	127. 8	127 87
10 018. 10	0 117	0. 022 5	0 038 7	10 150	11 345	11. 35	142. 9	142 98
10 025. 89	0 114	0. 022 5	0 038 6	10 150	12 141	12. 146	135. 93	136 01
9 985. 68	0 111	0. 022 5	0 038 7	10 150	6 335 8	6. 338 5	170. 25	170 36
10 002. 26	0 103	0. 022 5	0 039 5	10 150	7 808 9	7. 811 8	155. 21	155 3
10 014. 49	0 100	0. 022 5	0 039 6	10 150	9 109 8	9. 112 9	144. 32	144 39
9 986. 70	0 097	0. 022 5	0 039 4	10 150	5 357 6	5. 359 7	168. 3	168 4
10 029. 44	0 094	0. 022 5	0 039 5	10 150	10 419	10. 422	130. 72	130 79
10 019. 17	0 092	0. 022 5	0 040 9	10 150	9 525 8	9. 528 7	140. 09	140 15
10 058. 76	0 083	0. 022 5	0 040 7	10 150	14 98	14. 983	106. 05	106 09
10 029. 14	0 081	0. 022 5	0 041 6	10 150	9 713 6	9. 716	130. 35	130 41
10 053. 32	0 078	0. 022 5	0 041 9	10 150	13 743	13. 746	110. 25	110 29
10 059. 61	0 075	0. 0225	0 042 4	10 150	14 831	14. 834	105. 07	105 1
10 035. 98	0 072	0. 022 5	0 042 5	10 150	9 745 9	9. 748	123. 58	123 62
10 048. 51	0 064	0. 022 5	0 041 7	10 150	9 692 9	9. 694 7	111. 04	111 07
10 047. 18	0 061	0. 022 5	0 041 6	10 150	8 782	8. 783 5	111. 46	111 49
10 056. 92	0 056	0. 022 5	0 041 6	10 150	9 337 8	9. 339 3	102. 3	102 33
10 050. 59	0 053	0. 022 5	0 041 6	10 150	7 633 6	7. 634 8	106. 93	106 95
10 020. 93	0 044	0. 022 5	0 041 5	10 150	2 750 4	2. 750 9	131. 69	131 74
10 036. 32	0 042	0. 022 5	0 041 7	10 150	3 775 8	3. 776 4	117. 35	117 38
10 065. 70	0 039	0. 022 5	0 041 9	10 150	6 857 8	6. 858 6	91. 084	91 103
10 098. 23	0 036	0. 022 5	0 042 7	10 150	13 136	13. 138	64. 865	64 875
10 124. 65	0 033	0. 022 5	0 042 9	10 150	20 436	20. 437	45. 767	45 773
10 137. 75	0 025	0. 022 5	0 043 4	10 150	22 061	22. 063	34. 304	34 308
10 167. 97	0 022	0. 022 5	0 043 4	10 150	36 035	36. 037	18. 074	18 076
10 189. 89	0 019	0. 022 5	0 043 5	10 150	49 278	49. 281	9. 405 3	9 406 3
10 179. 33	0 017	0. 022 5	0 043 8	10 150	40 702	40. 704	11. 383	11 384
10 161. 42	0 014	0. 022 5	0 043 0	10 150	26 817	26. 818	15. 4	15 402
10 187. 49	0 003	0. 022 5	0 043 3	10 150	38 111	38. 116	0. 623 39	0 623 59

注: 表中模拟计算的期货期权的标的期货合约为 2006年 6月到期的近月期期货.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

观察表 3的数据，可以发现与前面论证的期货期权理论价值变化相吻合. 定价模型可以很好地解释人民币指数期货期权价格随定价参数的变化，并能反映美式期权提前执行的特征⑨.

4　结束语

随着我国汇率形成机制的不断完善以及利率的渐进市场化，规避市场风险对于我国市场参与者发展的战略意义日益凸现，市场中广泛存在着运用人民币衍生品对冲风险的需求. 本文根据美元指数衍生产品的发展经验，基于人民币指数创设人民币指数期货期权衍生产品，并建议实行场内交易，可以考虑在中国金融期货交易所进行.

本文参考美元指数期货期权的理论定价模型，提出基于二次逼近方法的人民币指数美式期货期权定价模型. 应用该模型考察了人民币指数期货期权理论价值的变化，分析了期货期权五个定价参数对理论价值的影响，发现当期权处于实值状态时，美式期权提前执行溢价对于期权定价有显著影响. 另外运用二次逼近法建立的人民币指数美式期货期权定价模型可以求解出期货期权提前执行的临界值. 在给定了相关参数后，持有期货期权合约的投资者可以确定提前执行的边界值，并且能够预测这一边界值的变化趋势，从而能很好地利用美式期权提前执行这一权利，获得收益.

最后，本文对设计的人民币指数期货期权合约进行了模拟实验. 结果表明定价模型能够刻画人民币指数美式期货期权提前执行的特征，并且能够反映人民币指数期货期权的定价参数对于期权价格的影响，建立的定价模型可以为交易策略和企业相关公允价值的计算提供技术支持.

参 考 文 献：

[1] 韩立岩，刘兰芬. 人民币指数及其信息价值[J]. 世界经济，2008，31(12)：62—72.
Han Li-yan，Liu Lan-fen. Chinese Yuan index with its information value[J]. The Journal of World Economy，2008，31(12)：62—72. (in Chinese)
[2] Krull S，Rai A. Optimal weights and international portfolio hedging with U. S. dollar index futures：An empirical investigation[J]. The Journal of Futures Markets，1988，12(5)：549—563.
[3] Schap K. USDX versatility covers multiple-currency hedges[J]. Futures，1991，(20)：32—35.
[4] Black F. The pricing of commodity contracts[J]. Journal of Financial Economics，1976，3(1—2)：167—179.
[5] Ramaswamy K，Sundaresan S. The valuation of options on futures contracts[J]. Journal of Finance，1985，40(5)：1319—1340.
[6] Whaley R E. Valuation of American futures options：Theory and empirical tests[J]. Journal of Finance，1986，41(1)：127—150.
[7] Kuldeep S，Kishore T. An empirical test of a valuation model for American options on futures contracts[J]. The Journal of Financial and Quantitative Analysis，1986，21(4)：377—392.
[8] Tucker A L，Madura J，Marshall J F. Pricing currency futures options with lognormally distributed jumps[J]. Journal of Business Finance & Accounting，1994，21(6)：857—874.
[9] Bhargava V，Clark J M. Pricing U. S. Dollar index futures options：An empirical investigation[J]. The Financial Review，2003，38(4)：571—590.
[10] 谢　赤. 随机利率条件下的货币期货期权的估值[J]. 湖南大学学报，2002，29(5)：121—128.
Xie Chi. Estimates of currency futures options under stochastic interest rates[J]. Journal of Hunan University，2002，29(5)：121—128. (in Chinese)
[11] MacMillan L W. Analytic approximation for the American put option[J]. Advances in Futures and Options Research，1986，1(1)：119—139.
[12] Barone-Adesi，Whaley R E. Efficient analytic approximation of American option values[J]. Journal of Finance，1987，42

⑨　本文一共模拟计算了 42份 3个月期期货期权合约以及 24份 6个月期期货期权合约，限于篇幅限制，文中仅列出一份予以说明.

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(2): 301—320.

[13] Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of Financial Economics, 1979, 7(3): 229—263.

[14] Jarrow R, Rudd A. Option Pricing[M]. Homewood: Dow Jones-Irwin, 1983.

[15] Ibanez A, Zapatero F. Monte Carlo valuation of American options through computation of the optimal exercise frontier[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2004, 39(2): 25—276.

[16] 马俊海, 张 维, 刘凤琴. 期权定价的蒙特卡罗模拟综合性方差减少技术[J]. 管理科学学报, 2005, 8(4): 68—73.
Ma Jun-hai, Zhang Wei, Liu Feng-qin. Comprehensive variance reduction techniques of Monte Carlo simulation methods for pricing options[J]. Journal of Management Sciences in China, 2005, 8(4): 68—73. (in Chinese)

[17] 姜礼尚, 罗 俊. 跳扩散模型下永久美式看跌期权定价[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 2(2): 10—18.
Jiang Li-shang, Luo Jun. Pricing perpetual options with jump diffusion[J]. Systems Engineering—Theory & Practice, 2008, 2(2): 10—18. (in Chinese)

[18] Basak S, Croitoru B. Equilibrium mispricing in a capital market with portfolio constraints[J]. Review of Financial Studies, 2000, 13(3): 715—748.

[19] Buraschi A, Jiltsov B. Model uncertainty and option markets with heterogeneous beliefs[J]. Journal of Finance, 2006, 61(6): 2841—2897.

[20] Hull J C. Options, Futures & Other Derivatives[M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000.

[21] 张光平. 人民币衍生产品[M]. 北京: 中国金融出版社, 2006.
Zhang Guang-ping. Rmminbi Derivatives[M]. Beijing: China Financial Publishing House, 2006. (in Chinese)

Study on pricing of Chinese Yuan index American futures options

HAN Li-yan, CUI Min-shu

School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100191, China

Abstract: Laying the theoretical foundation for the development of the Rmminbi foreign exchange derivatives, this paper constructs the pricing model of Chinese Yuan Index American futures options, which is based on the numerical procedure called quadratic approximation. We apply the model to analyze the variety of the theoretical value of Chinese Yuan Index futures options, finding that when the options are in the money, the early exercise premium has a significant impact on the price of the options. Experimental results show that the pricing model is capable to describe the property of the early exercise premium of American options and to reflect the effect of the pricing parameters on the price of Chinese Yuan Index futures options. The pricing model could provide technical support for investment strategy and evaluation of the corporate fair values as well.

Key words: Chinese Yuan index (CNYX); American futures options; quadratic approximation; valuation model

附录

基于二次逼近的货币指数美式期货期权定价计算过程

定义

$$\varepsilon_C(F(t), T) = C(F(t), T) - c(F(t), T) \qquad (A1)$$

其中, $C(F(t), T)$ 是所要求解的美式期权价值, $c(F(t), T)$ 是欧式期权价值, 是有精确解的.

这个溢价也满足下述的随机微分方程

$$\sigma^2 F^2 \varepsilon_{FF}/2 - r\varepsilon + \varepsilon_t = 0 \qquad (A2)$$

为了简化, 做如下替代.

首先, 令 T 为期权的有效期限, 即 $T = t^* - t$, t^* 为到期日, 因此 $\varepsilon_T = \varepsilon_t$. 其次, 式(A2)乘以 $2/\sigma^2$; 再次, $M = 2r/\sigma^2$; 于是式(A2)重写成

$$F^2 \varepsilon_{FF} - M\varepsilon - (M/r)\varepsilon_T = 0 \qquad (A3)$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

不失一般性, 将溢价定义成

$$\varepsilon_C(F, K) = K(T) f(F, K) \tag{A4}$$

因此

$$\varepsilon_{FF} = K f_{FF}, \ \varepsilon_T = K_T f + K K_T f_K \tag{A5}$$

把式(A5)带入式(A3), 因式分解 K, 得到

$$F^2 f_{FF} - M f[1 + (K_T / rK)(1 + k f_K / f)] = 0 \tag{A6}$$

选择 $K(T) = 1 - e^{-\gamma T}$, 代入式(A6), 得到

$$F^2 f_{FF} - (M/K) f - (1 - K) M f_K = 0 \tag{A7}$$

式(A7)中的最后一项近似等于 0, 因此得到

$$F^2 f_{FF} - (M/K) f = 0 \tag{A8}$$

公式(A8)是二阶微分方程, 有两个线性的、形式为 aF^q 的独立解, 可以通过将 $f = aF^q$ 代入式(A8)中求得这两个解.

$$aF^q [q^2 - q - M/K] = 0 \tag{A9}$$

式(A9)的两个根是

$$q_1 = [1 - \sqrt{1 + 4M/K}]/2$$

$$q_2 = [1 + \sqrt{1 + 4M/K}]/2$$

式(A8)的一般解是

$$f(F) = a_1 F^{q_1} + a_2 F^{q_2}$$

现在要决定参数 a_1, a_2. 由于 $q_1 < 0$, $a_1 \neq 0$, 则随着 F趋于 0, f趋近于无穷. 但对于美式期权来说, 这是不可实现的.

因此, $a_1 = 0$, 于是美式期权的近似值是

$$C(F(t), T) = c(F(t), T) + K a_2 F^{q_2} \tag{A10}$$

为了解临界值 F^*, 需要用到下式

$$F^* - X = c(F^*, T) + K a_2 F^{*q_2} \tag{A11}$$

然后令期权可执行价值的斜率 1等于 $c(F^*, T)$ 的斜率, 得到

$$1 = e^{-rT} N[d_1(F^*)] + K q_2 a_2 F^{*q_2 - 1} \tag{A12}$$

其中, $e^{-rT} N[d_1(F^*)]$ 是 $c(F^*, T)$ 对 F^* 的偏导数,

$$d_1(F^*) = [\ln(F^*/X) + 0.5\sigma^2 T]/\sigma\sqrt{T}$$

由式(A12)得到

$$a_2 = \{1 - e^{-rT} N[d_1(F^*)]\}/K q_2 F^{*q_2 - 1} \tag{A13}$$

把式(A13)代入式(A11), 得到

$$F^* - X = c(F^*, T) + \{1 - e^{-rT} N[d_1(F^*)]\} F^*/q_2 \tag{A14}$$

其中, F^* 需要迭代决定.

F^* 一旦决定了, 由式(A11)能得到 a_2. 将式(A13)代入式(A10)得到

$$C(F(t), T) = c(F(t), T) + A_2 (F/F^*)^{q_2},$$

当 $F < F^*$

$$C(F(t), T) = F - X,$$

当 $F \geqslant F^*$

其中

$$A_2 = (F^*/q_2)\{1 - e^{-rT} N[d_1(F^*)]\},$$

$$d_1(F^*) = [\ln(F^*/X) + 0.5\sigma^2 T]/\sigma\sqrt{T}$$

$$q_2 = (1 + \sqrt{1 + 4k})/2$$

$$k = \frac{2r}{\sigma^2(1 - e^{-rT})}$$

下面是决定 F^* 的迭代算法.

为了解临界值 F^*, 必须解公式(A14). 这需要用迭代算法.

开始时, 将式(A14)等号左右两边赋初值 F_i, 得到

$$LHS(F_i) = F_i - X$$

$$RHS(F_i) = c(F_i, T) + \{1 - e^{-rT} N[d_1(F^*)]\} F_i/q_2$$

其中

$$d_1(F_i) = [\ln(F_i/X) + 0.5\sigma^2 T]/\sigma\sqrt{T}$$

$$i = 1 \tag{A15}$$

为找到下一个值 F_{i+1}, 首先找到 RHS在 F_i处的斜率, 得到

$$b_i = e^{-rT} N[d_1(F_i)](1 - 1/q_2) + [1 - e^{-rT} n[d_1(F_i)]/\sigma\sqrt{T}]/q_2 \tag{A16}$$

n是标准正态分布的概率密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}.$$

下一步, 将 $RHS(F_i)$ 做一阶的泰勒展开, 并令展开式等于美式期货期权的可执行价值 $F - X$, 即

$$RHS(F_i) + b_i(F - F_i) = F - X,$$

然后可以得到 F_{i+1}

$$F_{i+1} = [X + RHS(F_i) - b_i F_i]/(1 - b_i) \tag{A17}$$

通过式(A17)可以得到 F的第 2个及以后的值, 这需要对公式(A15), (A16)和(A17)的重复迭代. 迭代一直进行到相对误差趋近于可以接受的区间. 比如

$$|LHS(F_i) - RHS(F_i)|/X < 0.000\,01 \tag{A18}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net